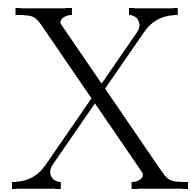




Enseignants: Dovi, Huruguen, Burmeister  
Algèbre linéaire - CMS  
10 novembre 2022  
Durée : 105 minutes



# Corrigé du contrôle 1

SCIPER: XXXXXX

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 6 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  - les points indiqués si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

| Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                     |                                                                                                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| choisir une réponse   select an answer<br>Antwort auswählen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer<br>NICHT Antwort auswählen        | Corriger une réponse   Correct an answer<br>Antwort korrigieren                                                                                                             |
|                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |   |
| ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                     |                                                                                                                                                                             |
|       |                                                                                     |                                                                                                                                                                             |



## Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

### Enoncé

On donne un ensemble fini  $E$  et un sous-ensemble  $A \subset E$  vérifiant :

$$\text{Card}(E) = 37 \text{ et } \text{Card}(A) = 13.$$

#### Question 1 (2 points)

Le nombre  $78 \binom{24}{15}$  est égal au nombre de sous-ensembles  $C$  de  $E$  tels que ...

☒ ...  $\text{Card}(C) = 17$  et  $\text{Card}(A \cap C) = 2$ .

☐ ...  $\text{Card}(C) = 24$ .

☐ ...  $\text{Card}(C) = 15$  et  $A \subset \mathcal{C}_E C$ .

☐ ...  $\text{Card}(A \cup C) = 28$ .

#### Question 2 (2 points)

Combien  $E$  possède-t-il de sous-ensembles à 19 éléments ?

☐  $3 \binom{35}{18} + \binom{35}{17}$

☒  $\binom{35}{19} + 3 \binom{35}{17}$

☐  $2 \binom{35}{19} + \binom{35}{17}$

☐  $\binom{35}{19} + 2 \binom{35}{18}$

#### Question 3 (2 points)

Combien existe-t-il de sous-ensembles  $B$  de  $E$  tels que  $\text{Card}(B) = 5$  et  $B \subset A$  ?

☐ 2817

☐ 2187

☒ 1287

☐ 1827

**Enoncé**

On définit  $S_n$  comme

$$S_n = \sum_{k=1}^n k! \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et on considère la proposition

$$T : \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \leq (n+1)!$$

**Question 4** (2 points)

En calculant  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  et  $S_4$ , indiquer la bonne affirmation parmi celles données ci-dessous.

☐  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$  pour  $n = 1, 2, 3, 4$

☐  $S_n = 3^{n-1}$  pour  $n = 1, 2, 3, 4$

☒  $S_n = n! + 3^{n-2}$  pour  $n = 2, 3, 4$

**Question 5** (2 points)

Pour prouver la proposition  $T$  par récurrence, on commence par vérifier que  $S_1 \leq 2!$  puis

☐ on montre que  $\left[ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{n+1} \leq (n+2)! \right]$  en admettant que  $\left[ S_n \leq (n+1)! \right]$

☒ on montre  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  que  $\left[ S_{n+1} \leq (n+2)! \right]$  en admettant que  $\left[ S_n \leq (n+1)! \right]$

☐ on montre que  $\left[ S_{n+1} \leq (n+2)! \right]$  en admettant que  $\left[ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \leq (n+1)! \right]$



## Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 6:** Cette question est notée sur 6 points.

|                                     |    |                          |    |                          |    |                          |    |                          |    |                          |    |                          |   |
|-------------------------------------|----|--------------------------|----|--------------------------|----|--------------------------|----|--------------------------|----|--------------------------|----|--------------------------|---|
| <input type="checkbox"/>            | .5 | <input type="checkbox"/> | .5 | <input type="checkbox"/> | .5 | <input type="checkbox"/> | .5 | <input type="checkbox"/> | .5 | <input type="checkbox"/> | .5 |                          |   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | 0  | <input type="checkbox"/> | 1  | <input type="checkbox"/> | 2  | <input type="checkbox"/> | 3  | <input type="checkbox"/> | 4  | <input type="checkbox"/> | 5  | <input type="checkbox"/> | 6 |

Soient les ensembles finis  $E = \{a, b, c, d\}$  et  $F = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  et  $\mathcal{F}$ , l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ . On considère les propositions

$$T : \quad \forall f \in \mathcal{F} \text{ et } A, B \subset E, \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$$

et

$$S : \quad \forall f \in \mathcal{F} \text{ et } C, D \subset F \quad C \cap D = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) = \emptyset.$$

- (a) Ecrire et démontrer la négation  $\text{non}T$  de  $T$ .
- (b) Ecrire et démontrer la contraposée  $K$  de  $S$ . Que peut-on dire sur  $S$ : est-elle vraie ou non?

### Solution

- (a) La négation  $T$  s'écrit

$$\text{non}T : \quad \exists f \in \mathcal{F} \text{ et } A, B \subset E, \quad A \cap B = \emptyset \text{ et } f(A) \cap f(B) \neq \emptyset.$$

$\text{non}T$  est vraie avec par exemple

$$A = \{a\} \quad B = \{b\} \quad f(a) = f(b) = \alpha.$$

En effet,

$$A \cap B = \emptyset \text{ et } f(A) \cap f(B) = \{\alpha\} \neq \emptyset.$$

- (b) Contraposée de  $S$ :

$$K : \quad \forall f \in \mathcal{F} \text{ et } C, D \subset F \quad f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \neq \emptyset \Rightarrow C \cap D \neq \emptyset.$$

Preuve:

$$\begin{aligned} f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \neq \emptyset &\Rightarrow \exists x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \\ &\Rightarrow \exists x \in E, f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D \\ &\Rightarrow \exists x \in E, f(x) \in C \cap D \\ &\Rightarrow C \cap D \neq \emptyset. \end{aligned}$$

$S$  et  $K$  sont équivalentes:  $S$  est vraie.



**Question 7:** Cette question est notée sur 6 points.

|                      |    |                      |    |                      |    |                      |    |                      |    |                      |    |                      |    |
|----------------------|----|----------------------|----|----------------------|----|----------------------|----|----------------------|----|----------------------|----|----------------------|----|
| <input type="text"/> | .5 | <input type="text"/> | .5 | <input type="text"/> | .5 | <input type="text"/> | .5 | <input type="text"/> | .5 | <input type="text"/> | .5 | <input type="text"/> | .5 |
| <input type="text"/> | 0  | <input type="text"/> | 1  | <input type="text"/> | 2  | <input type="text"/> | 3  | <input type="text"/> | 4  | <input type="text"/> | 5  | <input type="text"/> | 6  |

On considère l'application suivante:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

- (a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , déterminer l'ensemble  $f^{-1}(\{f(x)\})$ . Combien possède-t-il d'éléments?
- (b) L'application  $f$  est-elle injective? Justifier rigoureusement votre réponse.
- (c) Montrer que la restriction de  $f$  à  $[1, +\infty[$  est injective.

**Solution**

- (a) Résolvons  $f(x) = f(x')$

$$\iff \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{x'}{x'^2+x'+1}$$

$$\iff x(x'^2+x'+1) = x'(x^2+x+1)$$

$$\iff xx'^2 + xx' + x = x'x^2 + x'x + x'$$

$$\iff xx'(x' + 1) + x = x'x(x + 1) + x'$$

$$\iff xx'(x' + 1 - x - 1) + x - x' = 0$$

$$\iff xx'(x' - x) + x - x' = 0$$

$$\iff (x' - x)(xx' - 1) = 0$$

$$\iff x = x' \text{ ou } x' = \frac{1}{x}$$

$$f^{-1}(\{f(x)\}) = \begin{cases} \{x, \frac{1}{x}\} & \text{si } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Vérifions si on a toujours deux éléments pour  $x \neq 0$ :

$$x = \frac{1}{x} \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$$

On a donc en réalité :

$$f^{-1}(\{f(x)\}) = \begin{cases} \{x, \frac{1}{x}\} & \text{si } x \neq -1, 0, 1 \\ \{x\} & \text{si } x = -1, 0, 1 \end{cases}$$

On a donc deux éléments si  $x$  est différent de  $-1, 0$  ou  $1$  et un seul élément sinon.

- (b)  $f$  n'est pas injective:

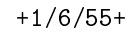
D'après (a), on a  $f(2) = f(\frac{1}{2})$

En effet,  $f(2) = \frac{2}{4+2+1} = \frac{2}{7}$  et  $f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2} : \frac{7}{4} = \frac{2}{7}$

- (c) Montrons que la restriction de  $f$  à  $[1, +\infty[$  est injective.

D'après (a),  $f(1)$  ne possède qu'un antécédent:  $x = 1$ .

D'autre part,  $x > 1 \iff 0 < \frac{1}{x} < 1$ . Ainsi  $f(x)$  n'a pas d'autre antécédent que  $x$  dans  $]1, +\infty[$ .



0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8

$$\begin{array}{ccc} f : & \mathbb{N}^2 & \longrightarrow \mathbb{N} \\ & (x, y) & \longmapsto xy^2 + 1. \end{array}$$

- $$f(A) = \{13, 37\}.$$

Par conséquent,  $n$  possède au moins un antécédent par  $f$ , ce qui montre qu'il appartient à  $\text{Im } f$ .



(e) En raisonnant comme en (a), on trouve que :

$$f^{-1}(\{13\}) = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid xy^2 = 12\} = \{(12, 1), (3, 2)\}$$

et :

$$f^{-1}(\{37\}) = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid xy^2 = 36\} = \{(36, 1), (9, 2), (4, 3), (1, 6)\}.$$

Pour créer  $A$ , on peut alors mettre ensemble un antécédent de 13 et trois antécédents de 37, comme par exemple :

$$A = \{(3, 2), (36, 1), (9, 2), (4, 3)\}.$$

On peut aussi mettre ensemble les deux antécédents de 13 et deux antécédents de 37, comme par exemple :

$$A = \{(12, 1), (3, 2), (36, 1), (4, 3)\}.$$